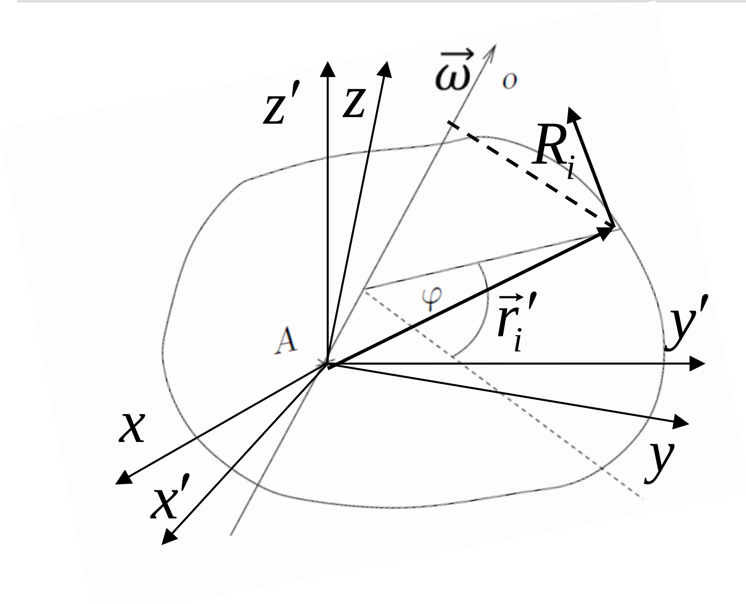
Opakování - Otáčení kolem pevného bodu - Eulerovy rovnice



• Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i \right) \right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2 \cdot \vec{\omega} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i \right) \cdot \vec{r}_i \right]$$

• Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{J}} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

• Zvolím-li soustavu souřadnou spjatou s tělesem v hlavních osách tenzoru setrvačnosti:

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

•Dostaneme **Eulerovy rovnice**:

$$J_1 \frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} + \Omega_y \Omega_z \left(J_3 - J_2 \right) = \mu_x$$

$$J_2 \frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} + \Omega_z \Omega_x \left(J_1 - J_3 \right) = \mu_y$$

$$J_3 \frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} + \Omega_x \Omega_y \left(J_2 - J_1 \right) = \mu_z$$

Opakování - Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

•**Eulerovy rovnice**:

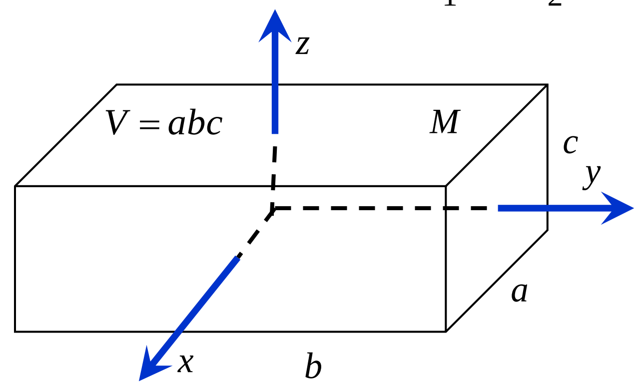
$$J_1 \frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} + \Omega_y \Omega_z (J_3 - J_2) = \mu_x$$

$$J_2 \frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} + \Omega_z \Omega_x (J_1 - J_3) = \mu_y$$

$$J_3 \frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} + \Omega_x \Omega_y (J_2 - J_1) = \mu_z$$

• **Setrvačník -** těleso otáčející se kolem pevného bodu:

• **Asymetrický setrvačník -** všechny tři hlavní momenty setrvačnosti různé: $J_1 \neq J_2 \neq J_3$

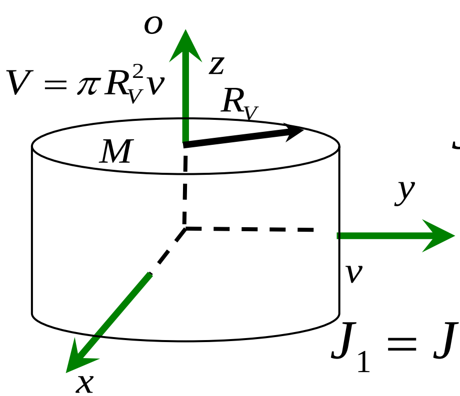


$$J_1 = \frac{M}{12}\left(b^2 + c^2\right)$$

$$J_2 = \frac{M}{12}\left(a^2 + c^2\right)$$

$$J_3 = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

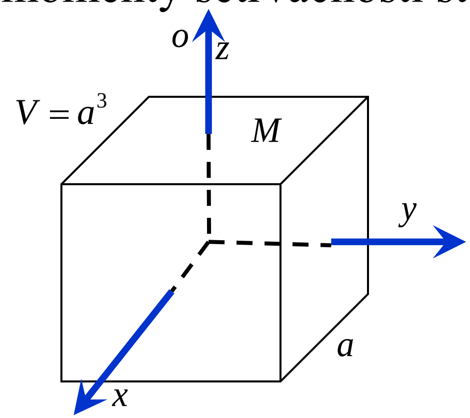
• **Symetrický setrvačník -** dva hlavní momenty setrvačnosti stejné: $J_1 = J_2 \neq J_3$



$$J_3 = \frac{MR_V^2}{2}$$

$$J_1 = J_2 = M\left(\frac{v^2}{12} + \frac{R_V^2}{4}\right)$$

• **Kulový setrvačník-**všechny tři hlavní momenty setrvačnosti stejné: $J_1 = J_2 = J_3$



$$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{Ma^2}{6}$$

Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

•**Eulerovy rovnice**:

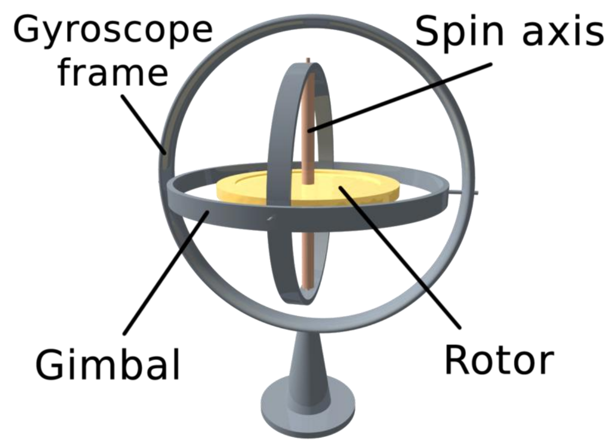
$$J_1 \frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} + \Omega_y \Omega_z \left(J_3 - J_2\right) = \mu_x$$

$$J_2 \frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} + \Omega_z \Omega_x \left(J_1 - J_3\right) = \mu_y$$

$$J_3 \frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} + \Omega_x \Omega_y \left(J_2 - J_1\right) = \mu_z$$

• **Volný (bezsilový) setrvačník** – setrvačník, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

• např. **Kardanův závěs** –setrvačník je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačníku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačníku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačník pohybovat jako volný.



• **Kulový setrvačník**-všechny tři hlavní momenty setrvačnosti stejné: $J_1 = J_2 = J_3 = J$

$$J \frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} = 0, \quad J \frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} = 0, \quad J \frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\Rightarrow \Omega_x = konst, \quad \Omega_y = konst, \quad \Omega_z = konst.,$$

$$\beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j \Rightarrow \beta_x = J\Omega_x, \beta_y = J\Omega_y, \beta_z = J\Omega_z \Rightarrow \vec{B} = J\vec{\omega}$$

Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

• Moment hybnosti je tedy násobkem vektoru úhlové rychlosti:

$$\vec{B} = J\vec{\omega}$$

• Nezávisí na volbě soustavy souřadnic, platí tedy i pro soustavu souřadnou pevnou v prostoru.

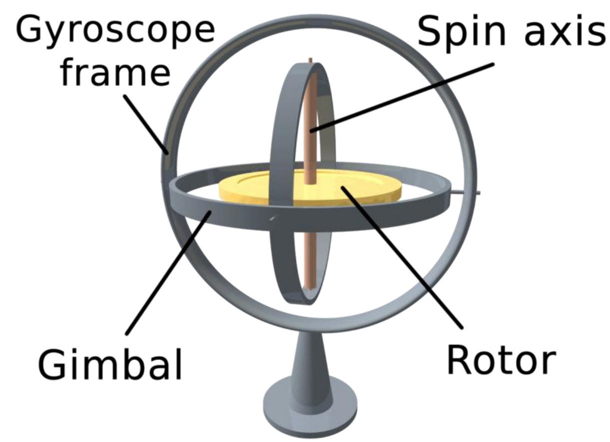
• Z druhé věty impulzové:

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \vec{B} = konst \Rightarrow \vec{\omega} = konst$$

• Volný kulový setrvačník rotuje kolem své libovolné osy stálou úhlovou rychlostí, přičemž osa je v prostoru i v tělese po celou dobu pohybu stálá.

• **Volný(bezsilový) setrvačník** – setrvačník, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

• např. **Kardanův závěs** –setrvačník je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačníku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačníku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačník pohybovat jako volný.



Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

• **Symetrický setrvačník** - budeme předpokládat, že osou rotace je z-ová osa souřadnic : $J_1 = J_2 \neq J_3$

$$J_1 \frac{d\Omega_x}{dt} + \Omega_y \Omega_z \left(J_3 - J_1\right) = 0$$

$$J_1 \frac{d\Omega_y}{dt} + \Omega_z \Omega_x \left(J_1 - J_3\right) = 0$$

$$J_3 \frac{d\Omega_z}{dt} = 0 \Rightarrow \Omega_z = konst.$$

• Rovnice upravíme:

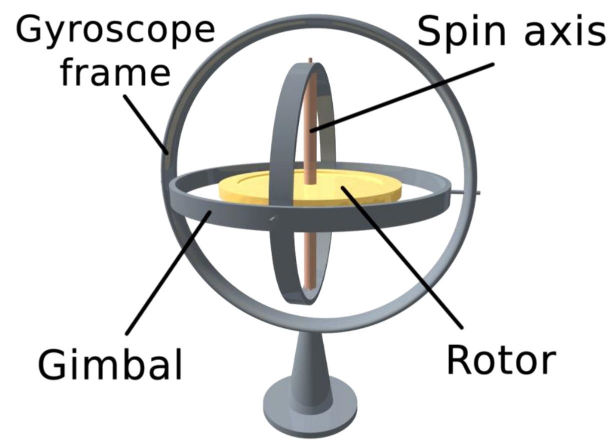
$$\frac{d\Omega_x}{dt} + \Omega_y \Omega_z \frac{J_3 - J_1}{J_1} = 0 \quad \Rightarrow \Omega_y = -\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega_x}{dt}$$

$$\frac{d\Omega_y}{dt} - \Omega_x \Omega_z \frac{J_1 - J_3}{J_1} = 0 \quad \Rightarrow \frac{d^2\Omega_x}{dt^2} + \Omega^2 \Omega_x = 0$$

$$\Omega_z \frac{J_1 - J_3}{J_1} = \Omega = konst.$$

• **Volný(bezsilový) setrvačník** – setrvačník, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

• např. **Kardanův závěs** –setrvačník je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačníku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačníku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačník pohybovat jako volný.



Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

- Rovnice formálně stejná jako pro harmonický kmit:

$$\frac{d^2\Omega_x}{dt^2} + \Omega^2\Omega_x = 0$$

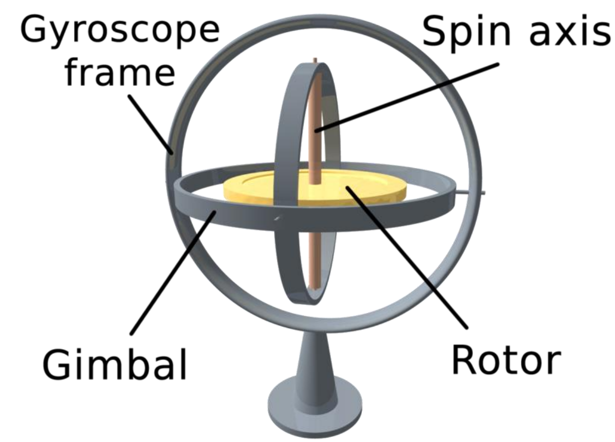
$$\Omega_x = A\sin(\Omega t + \alpha)$$

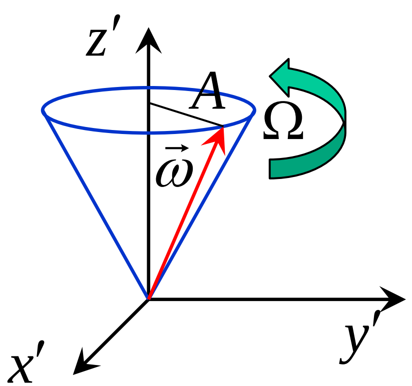
$$\Omega_y = -\frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega_x}{dt} = -A\cos(\Omega t + \alpha)$$

- Počáteční podmínky:

$$\vec{\omega}(t=0) = (\Omega_{0x}, \Omega_{0y}, \Omega_{0z})$$

- **Volný(bezsilový) setrvačník** – setrvačník, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).
- např. **Kardanův závěs** –setrvačník je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačníku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačníku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačník pohybovat jako volný.





- Rychlost **precese**:

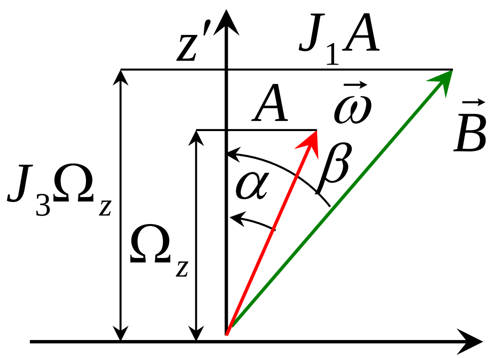
$$\Omega = \Omega_z \frac{J_1 - J_3}{J_1} = konst.$$

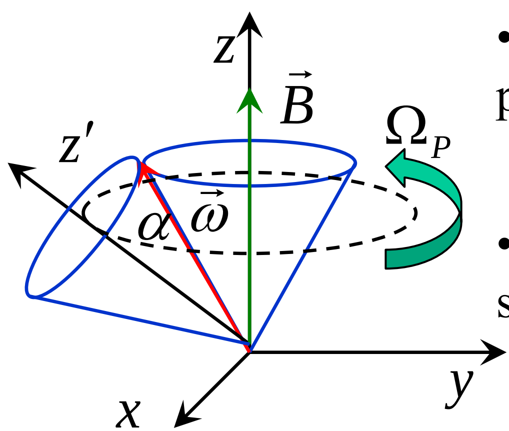
$$\Omega_x^2 + \Omega_y^2 = A^2\left[\sin^2(\Omega t + \alpha) + \cos^2(\Omega t + \alpha)\right] = A^2$$

Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

• Pro složky momentu hybnosti dostaneme:

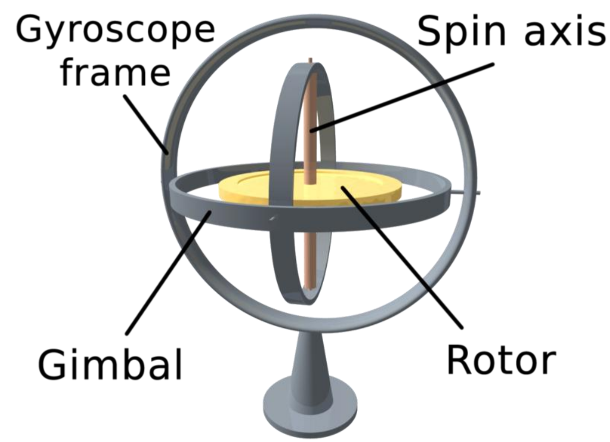
$$\beta_x = J_1\Omega_x,\ \beta_y = J_1\Omega_y,\ \beta_z = J_3\Omega_z$$





• **Volný(bezsilový) setrvačník** – setrvačník, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

• např. **Kardanův závěs** –setrvačník je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačníku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačníku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačník pohybovat jako volný.



• vektor momentu hybnosti je pevný v prostoru: $\dfrac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = 0$

• Rychlost precese osy symetrie setrvačníku v prostoru:

$$\Omega_P = \omega \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

• speciální volba počátečních podmínek:

$$\Omega_x = A\sin(\Omega t + \alpha)$$

$$\Omega_y = -A\cos(\Omega t + \alpha)$$

$$\Omega_{0x} = \Omega_{0y} = 0, \quad \Omega_{0z} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0, \quad \Omega_x = \Omega_y = 0 \Rightarrow$$

$$\beta_x = \beta_y = 0, \quad \beta_z = J_z \Omega_z$$

• vektor momentu hybnosti je rovnoběžný s vektorem úhlové rychlosti a pevný v prostoru:

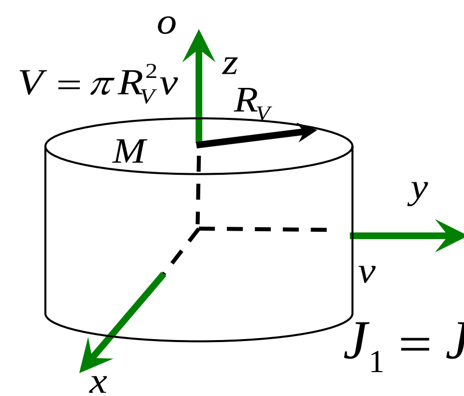
$$\vec{B} \,//\, \vec{\omega}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = 0$$

• Osa otáčení má v tělese i prostoru stálý směr a setrvačník kolem ní rotuje konstantní úhlovou rychlostí:

$$\omega = \Omega_z$$

• Osa tělesa, vůči níž může těleso udržovat stálou rotaci, se nazývá **volná osa.** U kulového setrvačníku jsou volné všechny osy procházející hmotným středem. U symetrického setrvačníku jsou volné jak osa symetrie tělesa, tak všechny osy kolmé na osu symetrie procházející hmotným středem.

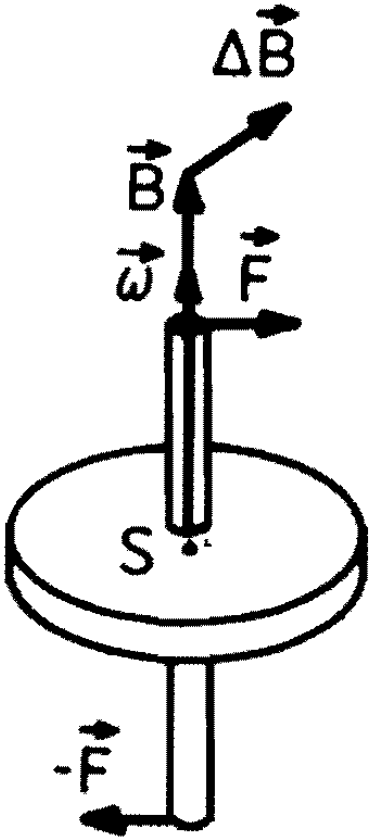
• **Symetrický setrvačník** - dva hlavní momenty setrvačnosti stejné: $J_1 = J_2 \neq J_3$



$$J_3 = \frac{MR_V^2}{2}$$

$$J_1 = J_2 = M\left(\frac{v^2}{12} + \frac{R_V^2}{4}\right)$$

Symetrický setrvačník



• Osa otáčení setrvačníku má směr celkového momentu hybnosti. Chceme-li osu otáčení setrvačníku vychýlit, musíme na něj působit nenulovým :

$$\vec{M} \neq 0$$

• Směr momentu sil je kolmý k vektoru momentu hybnosti a ke směru působících sil.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{B} = \vec{M}\Delta t$$

• Přírůstek momentu hybnosti je rovnoběžný s momentem sil a tedy kolmý k vektoru momentu hybnosti. V prvním přiblížení se tedy nemění velikost momentu hybnosti, ale pouze jeho směr.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{T}} + \vec{\omega} \times \vec{B}$$

• Před působením momentu síly je:

$$\vec{\omega} \,//\, \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} \times \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{T}}$$

• Změna momentu hybnosti je v prostoru a v tělese stejná.